ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2022

ΘΕΜΑ Α

Α1 Θεώρημα σελ. 186 σχολικού βιβλίου

Α2 Θεώρημα σελ. 142 σχολικού βιβλίου

Α3 Ορισμός σελ. 142 σχολικό βιβλίο

Α4. **α)** Σωστό

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται $f(x)=x^4-2x^2+1=\left(x^2-1\right)^2,\ A_f=(-\infty,1]$ και $g(x)=\sqrt{x},\ A_g=[0,+\infty)$.

Β1. $A_h=A_{f\circ g}=\left\{x\in A_g \mid g(x)\in A_f\right\}$, δηλαδή

έχουμε $\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in[0,+\infty) \\ \sqrt{x}\in(-\infty,1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \sqrt{x}\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x\leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0\leq x\leq 1$

οπότε $A_h=[0,1]$ και

$h(x)=f(g(x))=\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-1\right)^2=(x-1)^2$.

B2. $h(x)=(x-1)^2$, $x\in[0,1]$

Έστω $x_1,x_2\in[0,1]$ με $h(x_1)=h(x_2)$. Τότε:

$$h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow(x_1-1)^2=(x_2-1)^2\Rightarrow\sqrt{(x_1-1)^2}=\sqrt{(x_2-1)^2}\Rightarrow$$

$$|x_1-1|=|x_2-1|\Rightarrow -x_1+1=-x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$$

οπότε η h είναι $1-1$, άρα η h αντιστρέφεται και είναι για

$y=h(x)\Rightarrow y=(x-1)^2$, πρέπει $y\geq 0$,

$\Rightarrow\sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{y}\Rightarrow|x-1|=\sqrt{y}\Rightarrow -x+1=\sqrt{y}$, αφού $x\in[0,1]$,

$$\Rightarrow x=1-\sqrt{y},\ y\geq 0 \quad (1)$$

Είναι $0\leq x\leq 1\Rightarrow 0\leq 1-\sqrt{y}\leq 1\Rightarrow -1\leq-\sqrt{y}\leq 0$

$$\Rightarrow 0\leq\sqrt{y}\leq 1\Rightarrow 0\leq y\leq 1$$

και από $y=h(x)\Leftrightarrow h^{-1}(y)=x\overset{(1)}{\Rightarrow}h^{-1}(y)=1-\sqrt{y},\ y\in[0,1]$

ή $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x},\ x\in[0,1]$.

B3.

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x\in[0,1)\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$$

i) Η φ είναι συνεχής στο $[0,1)$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και

$$\lim_{x\to 1^-}\varphi(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}=\varphi(1)$$

Οπότε η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Επίσης,

$$\left.\begin{aligned}\varphi(0)&=1\\ \varphi(1)&=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\varphi(0)\neq\varphi(1)$$ οπότε για την φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$.

ii) Έχω $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\frac{\pi}{2}$, αφού $\eta\mu x\uparrow$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$\Rightarrow \frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1$, δηλαδή το $\eta\mu\alpha$ είναι μεταξύ των $\varphi(0)$ και $\varphi(1)$, άρα από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Ισχύουν f(0)=0 και $f'(x)=\begin{cases}-2, & x<-1\\ 3x^2-1, & x>-1\end{cases}$

Γ1. Για x<-1 έχουμε $f'(x)=-2\Rightarrow f'(x)=(-2x)'$ και από συνέπειες

ΘΜΤ $f(x)=-2x+c_1$, $c_1\in\mathbb{R}$

Για x>-1 έχουμε $f'(x)=3x^2-1\Rightarrow f'(x)=\left(x^3-x\right)'$ και από συνέπειες

ΘΜΤ $f(x)=x^3-x+c_2$, $c_2\in\mathbb{R}$

Από f(0)=0 $\Rightarrow c_2=0$, δηλ $f(x)=x^3-x$

Έτσι έχουμε $f(x)=\begin{cases}-2x+c_1, & x<-1\\ \kappa, & x=-1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο $x_o = 1$, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) \qquad (1)$$

Έχω $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \left(-2x + c_1\right) = 2 + c_1$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \left(x^3 - x\right) = 0$, $\qquad f(-1) = \kappa$,

Οπότε από (1) έχουμε κ=0 και $2 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -2$

Έτσι $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 \ , \ x < -1 \\ \quad 0 \quad , \ x = -1 \\ x^3 - x \ , \ x > -1 \end{cases}$ ή $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 \ , \ x \leq -1 \\ x^3 - x \ , \ x > -1 \end{cases}$

Γ2 . Για $x > -1$ έχω $f(x) = x^3 - x$ με $f'(x) = 3x^2 - 1$ και η εφαπτομένη της C_f στο x_o έχει εξίσωση :

$\varepsilon: \ y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$

$\varepsilon: \ y - \left(x_o^3 - x_o\right) = \left(3x_o^2 - 1\right)\left(x - x_o\right)$

$\varepsilon: \ y = \left(3x_o^2 - 1\right)x - 2x_o^3 \qquad (2)$

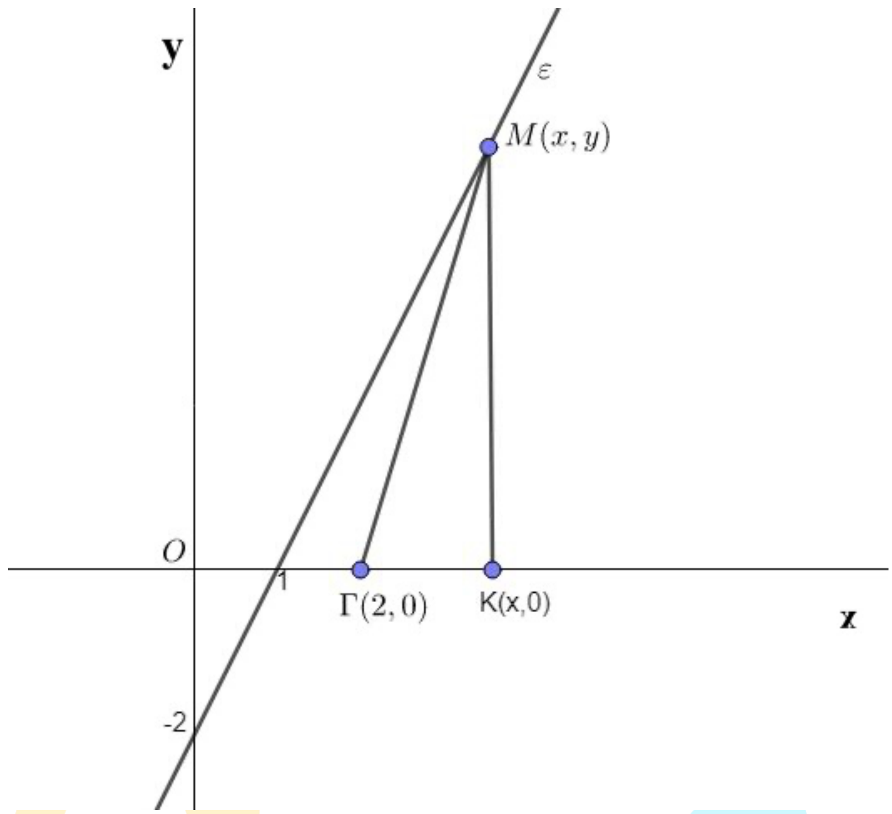
Για x=0 και y = - 2 έχουμε από (2)

$-2 = \left(3x_o^2 - 1\right) \cdot 0 - 2x_o^3 \Rightarrow 2x_o^3 = 2 \Rightarrow x_o^3 = 1 \Rightarrow x_o = 1$

Και από (2) έχουμε $\varepsilon: \ y = 2x - 2$

Γ3. $\varepsilon: \ y = 2x - 2$

x	0	1
y	-2	0



Είναι $x'(t_o) = 2 \;\mu/s$ και για x>2 έχουμε:

$$E = \frac{(K\Gamma)\cdot(KM)}{2} = \frac{(x-2)(2x-2)}{2} = \frac{(x-2)\,2(x-1)}{2} =$$

$$= (x-2)(x-1) = x^2 - 3x + 2$$

Οπότε έχω $E(t) = x^2(t)\,x'(t) - 3x'(t)$ και για $t = t_o$ έχουμε:

$$E(t_o) = x^2(t_o)\,x'(t_o) - 3x'(t_o) = 2\cdot 3\cdot 2 - 3\cdot 2 = 12 - 6 = 6 \;\tau.\mu./s$$

Γ4. Για κάθε x κοντά στο $-\infty$ έχουμε $f(x) = -2x - 2$, με

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty \quad , \quad \text{άρα} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)} = 0$$

και $\left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right| = \frac{|\eta\mu f(\chi)|}{|f(x)|} \leq \frac{1}{|f(x)|} \Rightarrow -\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{|f(x)|} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{|f(x)|}\right) = 0$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής και $L_1 = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 0$

$$L_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(u)}{1-(-u)^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{u^3-u}{1+u^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{u^3}{u^3} = 1$$

γιατί θέτουμε $u = -x$ και όταν $x \to -\infty$ το $u \to +\infty$.

Οπότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3}\right] = L_1 + L_2 = 0 + 1 = 1$

ΘΕΜΑ Δ

Είναι $f(x) = x - \ln(3x)$, $A_f = (0,+\infty)$

Δ1.

i) Για κάθε $x > 0$ έχω

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{3x}(3x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Είναι f γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$

και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Η f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0=1$, το $f(1)=1-\ln 3<0$,

αφού $e<3 \Rightarrow \ln e<\ln 3 \Rightarrow 1<\ln 3 \Rightarrow 1-\ln 3<0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}(x-\ln 3x)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0+}(\ln 3x)=-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\ln 3x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{\ln 3x}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln 3x}{x}\right)\lim_{x\to\infty} x=+\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln 3x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln 3x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Αν $x\in A_1=(0,1]$ τότε $f(A_1)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)=[1-\ln 3,+\infty)$ που περιέχει το μηδέν, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_1\in(0,1)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ θα έχει ακριβώς μια ρίζα $x_1\in(0,1)$.

Αν $x\in A_2=[1,+\infty)$ τότε

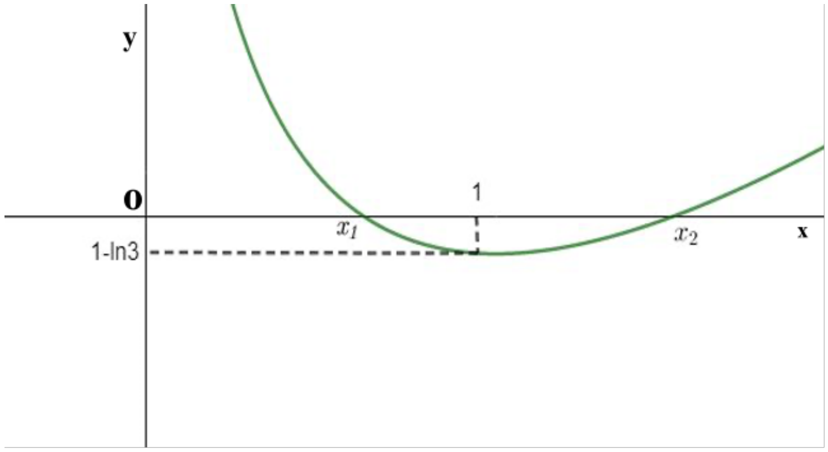
$f(A_2)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right)=[1-\ln 3,+\infty)$ που περιέχει το μηδέν, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_2\in(1,+\infty)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ θα έχει ακριβώς μια ρίζα $x_2\in(1,+\infty)$.

ii) Έχω $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$, $x>0$ άρα

$f''(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Δ2. Έχουμε για $x_1\in(0,1)$, $f(x_1)=0 \Leftrightarrow x_1-\ln(3x_1)=0 \Leftrightarrow \ln(3x_1)=x_1$

και όμοια $\ln(3x_2)=x_2$, για $x_2\in(1,+\infty)$.



Είναι $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[x_1,x_2]$, οπότε:

$$E=\int_{x_1}^{x_2}-f(x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}(-x+\ln 3x)\,dx=-\int_{x_1}^{x_2}x\,dx+\int_{x_1}^{x_2}\ln 3x\,dx=$$

$$=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}(x)'\ln 3x\,dx=-\left(\frac{x_2^{\;2}}{2}-\frac{x_1^{\;2}}{2}\right)+\left[x\ln 3x\right]_{x_1}^{x_2}=\int_{x_1}^{x_2}x(\ln 3x)'\,dx=$$

$$=-\frac{x_2^{\;2}-x_1^{\;2}}{2}+x_2\ln 2x_2-x_1\ln 3x_1-\int_{x_1}^{x_2}x\frac{1}{3x}3\,dx=$$

$$=-\frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{2}+x_2x_2-x_1x_1-\int_{x_1}^{x_2}1\,dx=$$

$$=-\frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{2}+x_2^{\;2}-x_1^{\;2}-(x_2-x_1)=$$

$$=-\frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{2}+(x_2+x_1)(x_2-x_1)-(x_2-x_1)=$$

$$=\frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)-2(x_2-x_1)}{2}=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$$

Δ3. Έχω $\mathrm{E}=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)>0$ άρα $x_2+x_1-2>0$ και

$0<x_1<1 \Leftrightarrow -1<-x_1<0 \Leftrightarrow 1<2-x_1<2$

Οπότε $x_2+x_1-2>0 \Leftrightarrow x_2>2-x_1 \Rightarrow f(x_2)>f(2-x_1)$ αφού $f\uparrow$ στο $[1,+\infty)$,

$\Rightarrow 0>f(2-x_1)$ δηλαδή $f(2-x_1)<0$.

Δ4. Η f έχει ελάχιστο στο $x_0=1$, δηλαδή ισχύει:

$f(x)\geq f(1) \Leftrightarrow f(x)\geq 1-\ln 3$, για κάθε $x>0$ (2)

Η εφαπτομένη της C_f στο x_2 έχει εξίσωση:

$\varepsilon: y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2) \Rightarrow \varepsilon: y=f'(x_2)(x-x_2)$

Η f είναι κυρτή άρα η C_f είναι πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής $x_2\in(1,+\infty)$, δηλαδή ισχύει:

$f(x)\geq f'(x_2)(x-x_2)$, για κάθε $x>0$ (3).

Από (2), (3) προσθέτοντας έχουμε:

$2f(x)>1-\ln 3+f'(x_2)(x-x_2)$, αφού η ισότητα ισχύει για διαφορετικά x,

Άρα $2f(x)+\ln 3>1+f'(x_2)(x-x_2)$

οπότε η εξίσωση $2f(x)+\ln 3=1+f'(x_2)(x-x_2)$ είναι αδύνατη στο $(0,+\infty)$.

Σχολιασμός θεμάτων

Οι μαθητές Θετικών Σπουδών διαγωνίσθηκαν στα Μαθηματικά σε θέματα που κάλυπταν το μεγαλύτερο μέρος της ύλης, ήταν κλιμακούμενης δυσκολίας και απευθύνονταν σε καλά προετοιμασμένους μαθητές σε όλες τις τάξεις του Λυκείου.

Αναλυτικά στο ΘΕΜΑ Α

Είχαμε το θεώρημα των παραγουσών, το Θεώρημα Fermat , ορισμό κατακόρυφης ασύμπτωτης και ερωτήσεις Σωστού – Λάθος χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες.

Το ΘΕΜΑ Β ήταν από τα κλασικά των πανελλαδικών των τελευταίων χρόνων, με 2 συναρτήσεις να ζητείται σύνθεση , αντίστροφη αυτής και έκλεινε με το Θ.Ε.Τ. , το οποίο ίσως να ξάφνιασε τους υποψηφίους ως ερώτημα Β Θέματος.

Το ΘΕΜΑ Γ:

- Βασιζόταν σε συνέπειες Θ.Μ.Τ.

- Εξίσωση εφαπτομένης

- Ρυθμό μεταβολής εύκολο, αλλά υπαρκτή η αδυναμία των μαθητών στα προβλήματα ρυθμού

- και όριο που απαιτούσε κριτήριο παρεμβολής στο ένα σκέλος και προσοχή για αντικατάσταση στο άλλο.

Ένας καλός μαθητής δεν θα αντιμετώπιζε κανένα πρόβλημα στο ΘΕΜΑ αυτό.

Το ΘΕΜΑ Δ είχε κλασικό $Δ_1$ ερώτημα με ρίζες και κυρτότητα, σχετικά εύκολο εμβαδό στο $Δ_2$ και ανισότητα στο $Δ_3$ που απαιτούσε χειρισμό από μαθητές που έχουν εντρυφήσει στα μαθηματικά .Στο $Δ_4$ εξίσωση που απαιτούσε σχέση της συνάρτησης με το ακρότατό της και την εφαπτομένη της

Συμπερασματικά:

Τα θέματα είχαν πολλές πράξεις αλλά όχι ιδιαίτερης δυσκολίας και ένας καλός μαθητής έφτανε στο άριστα. Δυστυχώς με την αλλαγή των εξετάσεων και με το κόψιμο των μαθηματικών από τους μαθητές που επιλέγουν σχολές υγείας , απομένουν ελάχιστοι καλοί μαθητές στο πεδίο των Μαθηματικών . Έτσι η πλειονότητα κυμαίνεται στη βάση ή και κάτω από αυτήν. Ευχόμαστε στους μαθητές καλή συνέχεια στα υπόλοιπα μαθήματα και καλά αποτελέσματα.

Οι Μαθηματικοί του Πρότυπου Φροντιστηριακού Κέντρου Άνοδος:

Αγγελοπούλου – Μαντά Διονυσία

Γεωργακόπουλος Γιάννης

Καρανικολός Σπύρος

Λίμουρας Αλέξανδρος

Ματζαβίνου Γεωργία

Νικολούτσος Άγγελος

Ρουσόπουλος Παναγιώτης

Στουφής Διονύσιος