ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2021

ΘΕΜΑ Α

Α1 Θεωρία Σχολικό βιβλίο, σελ. 135

Α2 Θεωρία Σχολικό βιβλίο, σελ. 51

Α3. Θεωρία Σχολικό βιβλίο σελ. 23

Α4. **α)** Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχω $f(x+1) = (x+1)e^{-x}, x \in \mathbb{R}$ (1)

Θέτω $x+1 = y,\ \ y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1-y = -x,$ οπότε η (1) γίνεται

$f(y) = y \cdot e^{1-y},\ y \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = x \cdot e^{1-x},\ x \in \mathbb{R}$

Β2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχω: $f'(x) = e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (1-x)' =$

$e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$

Και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

$\mu\acute{\varepsilon}\gamma\iota\sigma\tau o$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο [1,+∞).

Η f έχει μέγιστο (ολικό) στο $x_0=1$, το $f(1) = 1$.

Β3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχω : $f''(x) = (1-x)'e^{1-x} + (1-x)(e^{1-x})'=$

$=-e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} = = -e^{1-x} \cdot [1 + (1-x)] = = -e^{1-x} \cdot (2-x) = (x-2)e^{1-x}$

Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⌒		⌣

$\Sigma.\mathrm{K}.$

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$

Σημείο καμπής το Μ(2,f(2)) δηλαδή το $M(2,\frac{2}{e})$

- Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x \cdot \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$, οπότε η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$, άρα η C_f δεν έχει (πλάγια) ασύμπτωτη στο $-\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}}$ $\{$ έχω $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty$ $\}$

  οπότε σύμφωνα με τον κανόνα DE L'HOSPITAL

  έχω $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(e^{x-1})'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$

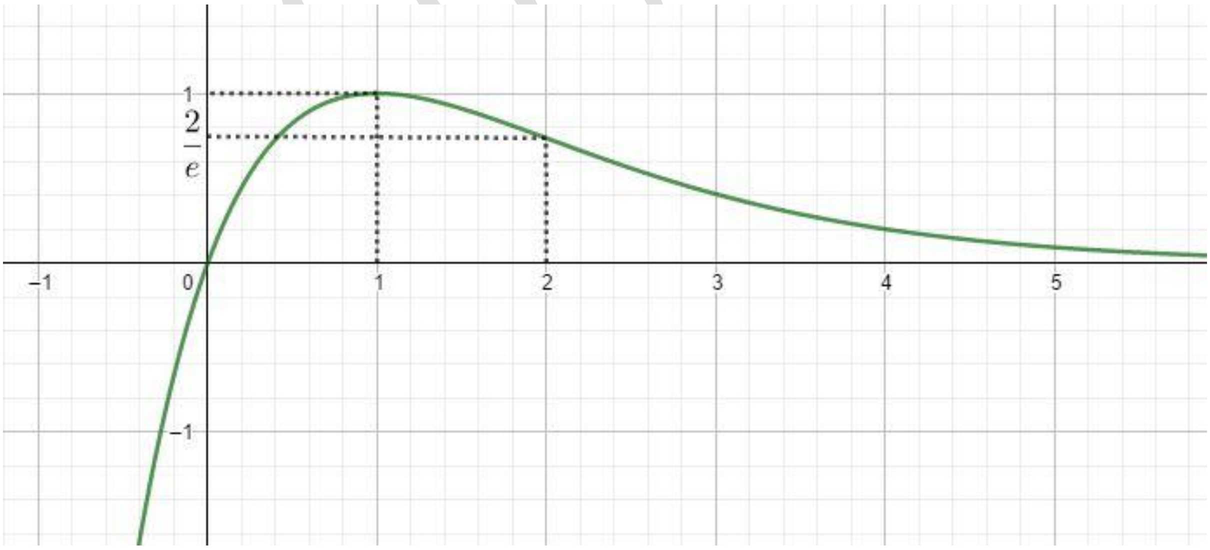
  άρα η ευθεία ε: y=0 (δηλαδή ο άξονας x΄x) είναι οριζόντια ασύπτωτη της C_f στο +∞.

B4. i) Αν x∈ $A_1 = (-\infty, 1]$, τότε $f(A_1) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1]$

Αν x∈ $A_2 = [1, +\infty)$, τότε $f(A_2) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right] = (0,1]$

Οπότε $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1]$

ii) Έχω την f(x)=λ (2) , λ∈ $\mathbb{R}$



- Αν λ<0 τότε η (2) έχει ακριβώς μια ρίζα την $x_1 < 0$
- Αν λ=0 τότε η (2) έχει ρίζα την $x = 0$
- Αν λ∈ $(0,1)$ τότε η (2) έχει 2 ρίζες άνισες , μία στο (0,1) και μια στο $(1, +\infty)$
- Αν λ=1, τότε η (2) έχει ρίζα την $x = 1$

- Αν λ∈ $(1,+\infty)$ τότε η (2) είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$, ως πολυωνυμική συνάρτηση και στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$, ως συνάρτηση συνημιτόνου.

Εξετάζω στο $x_0=0$:

Έχω $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\alpha x^3-3x^2-x+1\right)=1=f(0)$

και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\sigma\upsilon\nu x)=1$,

δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, άρα η f συνεχής και στο $x_0=0$, άρα συνεχής στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

Είναι :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x^3-3x^2-x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(\alpha x^2-3x-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\alpha x^2-3x-1\right)=-1$$

και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$,

δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Γ2. (i) Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ από το Γ1.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=-\eta\mu x$.

Είναι $f(0)=1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}$ =0 , δηλαδή $f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$,

οπότε η f δεν ικανοποιεί την υπόθεση $f(0) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ του θεωρήματος Rolle.

(ii) Για $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ έχω $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \pi$.

Γ3. Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $f'(x)=0$, με $x<0$ είναι αδύνατη.

Για $x<0$ έχω $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1$ με $\Delta = 36 + 12\alpha = 12(\alpha+3) < 0$ διότι $\alpha < -3$

και $3\alpha < 0$, άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$.

Άρα η $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(-\infty, 0)$.

Γ4. Από Γ3 έχω $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και $f'(x) = -\eta\mu x$, $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -\eta\mu x = 0 \Rightarrow x = \pi$

x	$-\infty$	0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘		↘		↗	

Η f έχει ολικό ελάχιστο στο $x_o = \pi$, δηλαδή $f(x) \geq f(\pi)$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρώ την συνάρτηση $\varphi(x)=\ln x-\frac{1}{x}$, $x\in[1,e]$.

Η φ είναι συνεχής στο $[1,e]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $\varphi(1)=\ln 1-1=-1<0$ και $\varphi(e)=\ln e-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}>0$,

δηλαδή $\varphi(0)\cdot\varphi(e)<0$, άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένας τουλάχιστον

$x_0\in(1,e)$ τέτοιος, ώστε $\varphi(x_0)=0\Leftrightarrow \ln x_0=\frac{1}{x_0}$ (1)

και επειδή $\varphi'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$, δηλαδή η $\varphi\uparrow$ στο $(1,e)$, έπεται ότι ο $x_0\in(1,e)$ είναι μοναδικός.

Δ2. Για κάθε $x>0$ έχω: $f'(x)=\ln x_0-\frac{1}{x}=\frac{1}{x_o}-\frac{1}{x}=\frac{x-x_0}{x\cdot x_0}$ από (1)

και $f'(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$

$f'(x)>0\Leftrightarrow x>x_0$

$f'(x)<0\Leftrightarrow x<x_0$

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f έχει ελάχιστο στο x_0,

το $f(x_0)=(\ln x_0)(x_0+1)-\ln x_0-1=\frac{1}{x_0}(x_0+1)-\frac{1}{x_0}-1=1+\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0}-1=0$

Δ3. Θα δείξω αρχικά ότι η εξίσωση g(x)=h(x) (2) έχει μοναδική λύση στο $(0,+\infty)$, αφού στο $(-\infty,0]$ έχω $g(x)\leq 0$ και $h(x)>0$, δηλαδή η (2) είναι αδύνατη στο $(-\infty,0]$.

Για x>0 η (2)$\Leftrightarrow g(x)=h(x) \Leftrightarrow xe^{-x}=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln(xe^{-x})=\ln\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}$

$\Leftrightarrow \ln x + lne^{-x}=(x+1)\ln\left(\frac{x_o}{e}\right) \Leftrightarrow lnx - xlne=(x+1)(\ln x_o - \ln e)$

$\Leftrightarrow lnx - x = (\ln x_o)(x+1)-x-1 \Leftrightarrow 0=(\ln x_o)(x+1)-\ln x-1$

$\Leftrightarrow$ f(x)=0 που από Δ2 έχει μοναδική λύση την $x_0\in(1,e)$ αφού $f(x_o)=0$ (ελάχιστη τιμή)

- Για να έχουν οι C_g , C_h κοινή εφαπτομένη στο x_0, αρκεί να δείξω ότι

$$g'(x_o)=h'(x_o)$$

Για κάθε x∈ ℝ έχω: $g'(x)=e^{-x}-xe^{-x} \Rightarrow g'(x_o)=e^{-x_o}-x_oe^{-x_o}$ (3)

και $h'(x)=\left[\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}\right]'=\left[e^{(x+1)\ln\left(\frac{x_o}{e}\right)}\right]'=e^{(x+1)\ln\left(\frac{x_o}{e}\right)}\cdot\left[(x+1)\ln\left(\frac{x_o}{e}\right)\right]'=$

$=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}\cdot\ln\left(\frac{x_o}{e}\right) \Rightarrow h'(x_o)=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x_o+1}\cdot(lnx_o-lne)$

$\overset{(4)}{\Rightarrow} h'(x_o)=x_oe^{-x_o}\cdot(lnx_o-1)$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} h'(x_o)=x_oe^{-x_o}\cdot(\frac{1}{x_o}-1)$

$\Rightarrow h'(x_o)=e^{-x_o}-x_oe^{-x_o}=\ g'(x_o)$ από (3).

Ισχύει $g(x_o)=f(x_o)$ $\Rightarrow x_oe^{-x_o}=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x_o+1}$ (4)

Δ4. Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o , τότε το x_o είναι κρίσιμο σημείο της φ.

Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_o τότε θεωρώ τη συνάρτηση

$d(x)=(AB)=\sqrt{(f(x)-\varphi(x))^2}=|f(x)-\varphi(x)|=f(x)-\varphi(x)$, $x>0$,

αφού $f(x)>\varphi(x)$.

Η d γίνεται ελάχιστη στο x_o εσωτερικό του $(0,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_o , οπότε από θεώρημα Fermat έχω

$d'(x_o)=0 \Leftrightarrow f'(x_o)-\varphi'(x_o)=0 \Leftrightarrow 0-\varphi'(x_o)=0 \Leftrightarrow \varphi'(x_o)=0$, άρα το x_o είναι κρίσιμο σημείο της φ.