ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α.** θεωρία : Σχολικό βιβλίο, σελ. 15
β. **i)** θεωρία : Σχολικό βιβλίο, σελ. 35
ii) θεωρία : Σχολικό βιβλίο, σελ. 36

Α2. θεωρία : Σχολικό βιβλίο, σελ. 142

Α3. θεωρία : Σχολικό βιβλίο, σελ. 135

Α4. **α.** Λάθος

Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases}-1 & ,x<0\\ 1 & ,x>0\end{cases}$. Έχω $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, όμως η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

β. Λάθος

Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & ,x\neq 1\\ 4 & ,\ x=1\end{cases}$.

Έχω $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$, ενώ $f(1)=4$, δηλ $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$

Α5. Το γ) 4

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda)=2\Leftrightarrow 0+\lambda=2\Leftrightarrow\lambda=2$

Άρα $f(x)=e^{-x}+2,\ x\in\mathbb{R}$

Β2. Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x=e^{-x}-x+2$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[2,3]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$g(2)=e^{-2}>0$

$g(3)=\dfrac{1}{e^3}-1<0$

Δηλαδή $g(2)\cdot g(3)<0$.

Άρα από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$ και επειδή $g'(x)=-e^{-x}-1<0$, δηλαδή η g είναι γνησίως φθίνουσα, έπεται ότι η $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-x=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(2,3)$.

B3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχω $f'(x)=-e^{-x}<0$. Δήλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι $1-1$, οπότε η f αντιστρέφεται.

Είναι: $y=f(x)\Rightarrow y=e^{-x}+2\Rightarrow e^{-x}=y-2, y>2$

$\Rightarrow -x=\ln(y-2)\Rightarrow x=-\ln(y-2), y>2$

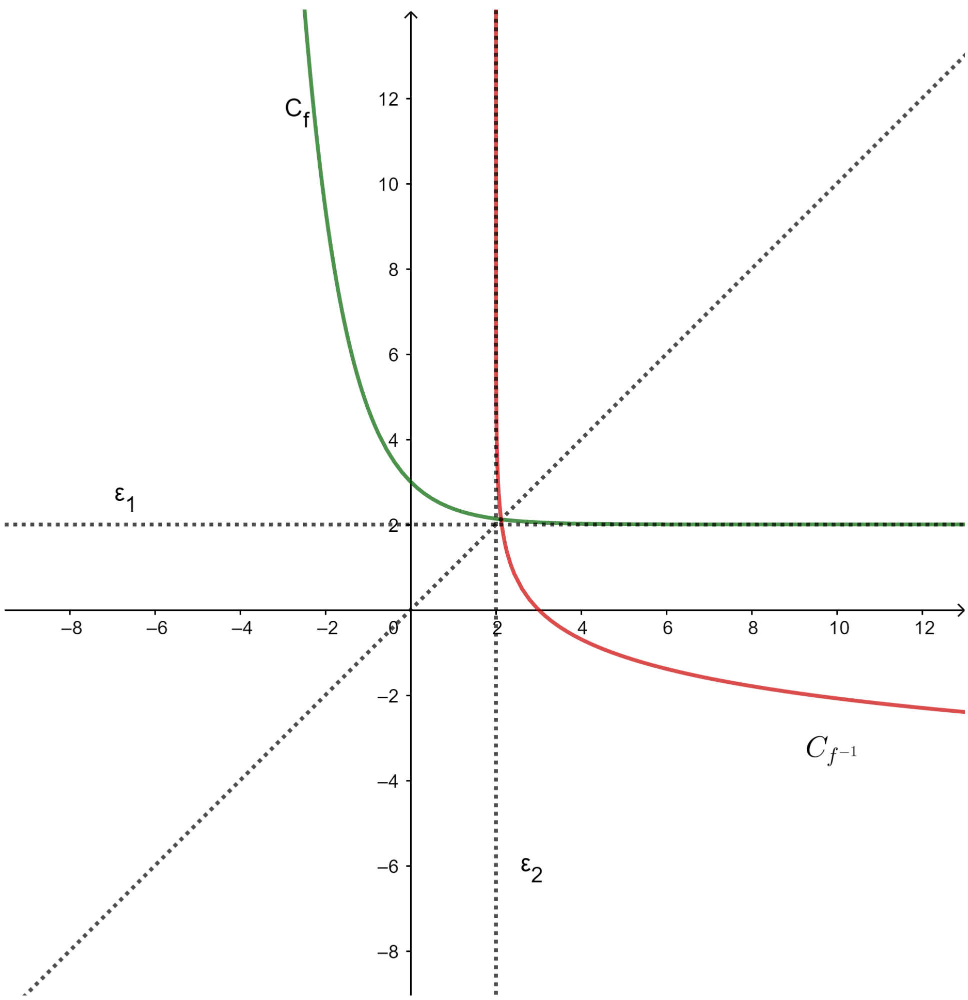
Οπότε $y=f(x)\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x\Leftrightarrow f^{-1}(y)=-\ln(y-2), y>2$

ή $f^{-1}(x)=-\ln(x-2), x>2$

B4. Έχω $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x)=-\lim\limits_{x\to 2^+}\ln(x-2)=-\lim\limits_{x\to 2^+}\ln u=+\infty$

διότι θέτω $x-2=u$, άρα όταν $x\to 2^+$ τότε $u\to 0^+$

Άρα η ευθεία $\varepsilon_2: x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.



ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a\ ,\ x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x\ ,\ x<1 \end{cases}$$

Γ1. Πρέπει αρχικά η f να είναι συνεχής στο $x_1 = 1$ δηλαδή να ισχύει:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \qquad (1)$$

Έχω:
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2+a\right)=1+a=f(1)$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(e^{x-1}+\beta x\right)=1+\beta$$

Από $(1)\Rightarrow 1+\alpha=1+\beta\Rightarrow \alpha=\beta \qquad (2)$

Ακόμη πρέπει η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_1 = 1$ δηλαδή να ισχύει:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \qquad (3)$$

Έχω: $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+a-1-a}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$

και $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-a}{x-1}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1}$

Από κανόνα De L'Hospital έχω: $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta}{1}=1+\beta$

Από $(3)\Rightarrow 1+\beta=2\Rightarrow \beta=1$ και από $(2)\Rightarrow \alpha=1$.

Για α=β=1 έχω: $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+x\ ,\ x<1 \\ x^2+1\ ,\ x\geq 1 \end{cases}$

Γ2. Για x<1 έχω $f'(x)=e^{x-1}+1>0$
Για x>1 έχω $f'(x)=2x>0$
Για $x_1 = 1$ έχω $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$

δηλαδή $f'(1)=2>0$

άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε

$$f\left((-\infty,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x)\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

Γ3. **i)** - Για $x\geq 1$ έχω $f(x)=x^2+1>0$, οπότε η εξίσωση f(x) = 0 είναι αδύνατη στο $\left[1,+\infty\right)$

- Για $0\leq x<1$ έχω $f(x)=e^{x-1}+x>0$, οπότε η εξίσωση f(x) = 0 είναι αδύνατη στο $\left[0,1\right)$

- Για $x<0$ έχω $f(x)=e^{x-1}+x$ με

$f\left((-\infty,0)\right)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x)\ ,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)\right)=(-\infty,e^{-1})$, που περιέχει το 0 ,

άρα η εξίσωση f(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(-\infty,0\right)$ και επειδή η f γνησίως αύξουσα , έπεται ότι υπάρχει μοναδικός $x_o\in\left(-\infty,0\right)$ ώστε $f(x_o)=0$

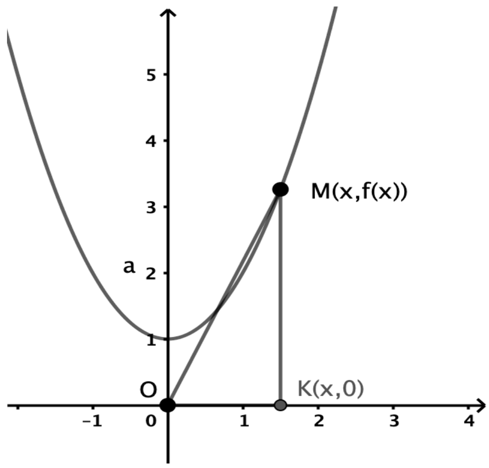
ii) Για $x > x_o$ επειδή η f γνησίως αύξουσα $\Rightarrow f(x)>f(x_o)=0$ και

$x_o < 0$ άρα $\begin{cases} f^2(x)>0 \\ -x_o f(x)>0 \end{cases} \Rightarrow f^2(x)-x_o f(x)>0$ άρα η εξίσωση

$f^2(x)-x_o f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $\left(x_o,+\infty\right)$

Γ4. Για $x\geq 1$ έχω

$y=x^2+1$, $x(t_o)=3$, $x'(t_o)=2$ τμ/s



Έχω $(\text{OKM})=\dfrac{1}{2}xy$ δηλαδή

$\text{E}=\dfrac{1}{2}x(x^2+1)$ δηλαδή

$E(t)=\dfrac{1}{2}\left(x^3(t)+x(t)\right)$

$$E'(t)=\frac{1}{2}\left(3x^2(t)\cdot x'(t)+x'(t)\right)=\frac{1}{2}x'(t)\left(3x^2(t)+1\right)$$

οπότε τη χρονική στιγμή t_o έχω:

$$E'(t_o)=\frac{1}{2}x'(t_o)\left(3x^2(t_o)+1\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(3\cdot 3^2+1\right)=28 \text{ τμ/s}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχω $f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\left(x-1\right)\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}+\alpha \;\Rightarrow$

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2\left(x-1\right)^2}{x^2-2x+2}+\alpha \quad (2)$$

Αφού η $\varepsilon: y=-x+2$ εφάπτεται της C_f στο Α(1,1) έπεται ότι:

- $f\left(1\right)=1\Rightarrow\alpha+\beta=1 \;\; (1)$
- $f'(1)=-1\Rightarrow\alpha=-1$ και από (1) $\Rightarrow\beta=2$

Δ2. Η συνάρτηση $h(x)=f(x)-y_\varepsilon=\left(x-1\right)\ln\left(x^2-2x+2\right)$ είναι συνεχής στο $\left[1,2\right]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και $h(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\left[1,2\right]$

άρα $\mathrm{E}=\int_1^2 h(x)\,dx=\int_1^2\left(x-1\right)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx=$

$=\int_1^2\frac{1}{2}\ln u\,du=\frac{1}{2}\int_1^2 u'\ln u\,du=$

$=\frac{1}{2}\left[u\ln u\right]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 u\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\left(2\ln 2-\ln 1\right)-\frac{1}{2}(2-1)$

$=\ln 2-\frac{1}{2}$ τ.μ.

θέτω $u=x^2-2x+2$

$\Rightarrow du=\left(2x-2\right)dx$

$\Rightarrow\left(x-1\right)dx=\frac{1}{2}du$

για $x=1\Rightarrow u=1$

για $x=2\Rightarrow u=2$

Δ3. i) Από (2) έχω $f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\dfrac{2\left(x-1\right)^2}{x^2-2x+2}-1\geq -1$ αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχω $x^2-2x+2=\left(x-1\right)^2+1\geq 1$

$$\Rightarrow\ln\left(x^2-2x+2\right)\geq\ln 1=0 \;\text{ και }\; \frac{2\left(x-1\right)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$$

ii) Είναι $f\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)+\lambda\geq\left(\lambda-1\right)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq\left(\lambda-1\right)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+2-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f\left(\lambda\right)-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f\left(\lambda\right)\geq-\frac{1}{2}$

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- Η f είναι παρ/μη στο $\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ με $f'(x)\geq -1$

άρα απο Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in \left(\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda} = 2\left[f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\right]$$ όμως

$$f'(\xi) \geq -1 \Rightarrow 2\left[f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\right] \geq -1 \Rightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$$

Δ4. Έχω $f(x)=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2$, με $f'(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=-x^3-x+2$, με $g'(x)=-3x^2-1\leq -1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Για να έχουν κοινή εφαπτομένη, έστω την $\zeta: y=\kappa x+\mu$ θα πρέπει να υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε: $\begin{cases} f'(x_1)=\kappa \geq -1 \\ g'(x_2)=\kappa \leq -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x_1)=g'(x_2)=-1$

$\Rightarrow x_1=1$ και $x_2=0$. Άρα, απο δεδομένα, η κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g είναι η $\varepsilon: y=-x+2$

Τις λύσεις επιμελήθηκαν οι Μαθηματικοί τουΠρότυπου Φροντιστηριακού Κέντρου **Άνοδος:**

Αγγελοπούλου – Μαντά Διονυσία
Δακουρά Μάρω
Καρανικολός Σπύρος
Λίμουρας Αλέξανδρος
Μπαχούμης Ανδρέας
Ρουσόπουλος Παναγιώτης
Στουφής Διονύσιος
Χρυσανθόπουλος Δημήτρης

Σχολιασμός θεμάτων

Τα θέματα των Μαθηματικών θετικών σπουδών , Οικονομίας και Πληροφορικής χαρακτηρίζονται από τη φαινομενική ευκολία , την πρωτοτυπία (αφού δεν ζητούσαν άμεσα κλασικά ερωτήματα μονοτονίας , ακροτάτων , κυρτότητας και σημείων καμπής) και τον όγκο των απαντήσεων.
Αναλυτικά :

- Το ΘΕΜΑ Α ζητούσε βασικές έννοιες , είτε ως ορισμούς , είτε ως θεωρήματα , χαρακτηρίζονται από το μεγάλο όγκο των ερωτημάτων , την απουσία ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ χωρίς αιτιολόγηση και την εμφάνιση ερωτήματος πολλαπλής επιλογής (σχολικού βιβλίου).

- Στο ΘΕΜΑ Β και ΘΕΜΑ Γ έχουμε κλασικές συναρτήσεις όπου ζητούνται έννοιες προσβάσιμες στους διαβασμένους μαθητές με κάποια δυσκολία στη γραφική παράσταση του Β4 και τα πολλά μόρια (6) που αντιστοιχούσαν , όπως επίσης και αντίστοιχη δυσκολία στο Γ4 , αφού ο ρυθμός μεταβολής (ως πρόβλημα) είναι από τις αδυναμίες της πλειονότητας των μαθητών.

- Στο ΘΕΜΑ Δ συναντάμε τις έννοιες της εφαπτομένης και του εμβαδού χωρίου , οικείες στους μαθητές αλλά με δεξιότητα στις πράξεις , ενώ κρίνονται απαιτητικά το Δ3 (ii) και το Δ4 , όπου έπρεπε να διαμορφώσουν κατάλληλα την ανισότητα , ώστε να φανεί το ΘΜΤ και να προσέξουν ότι η κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g είναι σε διαφορετικά σημεία επαφής , ενώ η κόπωση θα έπαιζε το ρόλο της.

Συμπέρασμα: Τα θέματα απευθύνονταν σε μαθητές που είχαν προετοιμαστεί σωστά τουλάχιστον στις τάξεις του Λυκείου , ώστε μαζί με τη γνώση να έχουν αναπτύξει τη μαθηματική τους ικανότητα και κρίση.
Προσβάσιμη η βάση για τους αδύνατους μαθητές, το 15 για τους μέτριους, ενώ η προσέγγιση του Άριστα απαιτούσε, πέρα από τις γνώσεις, συγκέντρωση και προσοχή.

Οι Μαθηματικοί τουΠρότυπου Φροντιστηριακού Κέντρου **Άνοδος:**
Αγγελοπούλου – Μαντά Διονυσία
Δακουρά Μάρω
Καρανικολός Σπύρος
Λίμουρας Αλέξανδρος
Μπαχούμης Ανδρέας
Ρουσόπουλος Παναγιώτης
Στουφής Διονύσιος
Χρυσανθόπουλος Δημήτρης