ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2020 (ΝΕΟ)

ΘΕΜΑ Α

Α1 Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών Σχολικό βιβλίο, σελ. 76

Α2 Ορισμός Σχολικό βιβλίο, σελ. 104

Α3. α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2$, όμως δεν είναι $f'(x) > 0$, αφού $f'(0) = 0$

Α4. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Έχουμε τις συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ με $A_f = (1, +\infty)$ και $g(x)=e^x$

με $A_g=\mathbb{R}$

Β1 Είναι $D_{f\circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\}$, δηλαδή

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x \in (1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x > e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0,$$

Οπότε $D_{f\circ g} = (0, +\infty)$

και $(f \circ g)(x)=f(g(x)) = \frac{g(x)+2}{g(x)-1} = \frac{e^x+2}{e^x-1}$, $x>0$

B2 Για $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)$ $\Rightarrow \frac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\frac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}$

$\Rightarrow e^{x_1}e^{x_2}-e^{x_1}+2e^{x_2}-2=e^{x_1}e^{x_2}+2e^{x_1}-e^{x_2}-2$

$\Rightarrow -3e^{x_1}=-3e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1}=e^{x_2} \Rightarrow x_1=x_2$, άρα $f\circ g$ 1- 1 , οπότε αντιστρέφεται.

Για $y\in\mathbb{R}$ με $y=(f\circ g)(x) \Rightarrow y=\frac{e^x+2}{e^x-1} \Rightarrow y\,e^x-y=e^x+2 \Rightarrow y\,e^x-e^x=y+2$

$\Rightarrow (y-1)\,e^x=y+2 \Rightarrow e^x=\frac{y+2}{y-1}$ (1) , $y\neq 1$

Είναι $x>0 \Rightarrow \frac{y+2}{y-1}>1 \Rightarrow e^x>e^0 \Rightarrow e^x>1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{y+2}{y-1}>1 \Rightarrow \frac{y+2}{y-1}-1>0$

$\Rightarrow \frac{y+2-y+1}{y-1}>0 \Rightarrow \frac{3}{y-1}>0$ $\Rightarrow y>1$ και η σχέση (1) γίνεται:

$ln\,e^x=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) \Rightarrow x=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$, $y>1$ (2)

Από $y=(f\circ g)(x) \Rightarrow (f\circ g)^{-1}(y)=x \overset{(2)}{\Rightarrow} (f\circ g)^{-1}(y)=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$, $y>1$ ή

$(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, $x>1$

B3 Είναι $\varphi(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, $x>1$

Για κάθε $x>1$ έχω: $\varphi'(x)=\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{1\cdot(x-1)-(x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=$

$\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{-3}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)(x+2)}<0$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

B4 Θέτω $y=\frac{x+2}{x-1}$. Όταν $x\to 1^+$, τότε $y\to +\infty$

$$\lim_{x\to 1^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)=\lim_{y\to+\infty}(lny)=+\infty$$

Θέτω $y=\frac{x+2}{x-1}$. Όταν $x\to+\infty$, τότε $y\to 1$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)=\lim_{y\to 1}(lny)=ln1=0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \quad (1)$.

Έχω $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{1-x} - \ln\lambda\right) = 1 - \ln\lambda = f(0)$

και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x) = \lambda$.

Οπότε από την (1) έχω $1 - \ln\lambda = \lambda \Leftrightarrow \ln\lambda + \lambda - 1 = 0 \quad (2)$

Θεωρώ $\varphi(\lambda) = \ln\lambda + \lambda - 1$, $\lambda > 0$.

Έχω $\varphi(1) = 0$ και $\varphi'(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + 1 > 0$, δηλαδή η $\varphi(\lambda)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε η (2) έχει μοναδική λύση $\lambda = 1$.

Για $\lambda = 1$ είναι:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x \le 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Γ2. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{x(1-x)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1-x} = 1$

και $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right) = 1 + 0 = 1$

οπότε η f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 1$, δηλαδή $\varepsilon\varphi\omega = 1 \Rightarrow \omega = \dfrac{\pi}{4}$, όπου ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $A(0,1)$ με τον άξονα $x'x$.

Γ3. Για $x<0$ είναι $f'(x)=\frac{-1(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}>0$.

Για $0<x<\frac{3\pi}{2}$ είναι $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$,

δηλαδή $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1-x)^2}, & x\le 0\\ \sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x, & 0<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$

Η f παραγωγίσιμη στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right)$, οπότε κρίσιμα σημεία είναι οι ρίζες της $f'(x)=0$, δηλαδή

$\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=0,\ 0<x<\frac{3\pi}{2}$, οπότε, $\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$ ή $x=\frac{5\pi}{4}$.

Τελικά κρίσιμα σημεία είναι τα $x_1=\frac{\pi}{4}$ και $x_2=\frac{5\pi}{4}$.

Γ4. Δίνεται $a'(t)=-\frac{a(t)}{3}$ (3), και η εφαπτομένη της C_f στο $M(a,f(a))$ έχει εξίσωση:

$\varepsilon: y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$\varepsilon: y-\frac{1}{1-a}=\frac{1}{(1-a)^2}(x-a)$

Για $y=0$ έχω:

$-\frac{1}{1-a}=\frac{1}{(1-a)^2}(x-a)\Leftrightarrow -(1-a)=x-a\Leftrightarrow x=2a-1$

Δηλαδή $x(t)=2a(t)-1\Rightarrow x'(t)=2a'(t)\Rightarrow x'(t)=2\left(-\frac{a(t)}{3}\right)=-\frac{2}{3}a(t)$

και για $t=t_0$ έχω

$x'(t_0) = -\frac{2}{3} \cdot (-1) = \frac{2}{3}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f συνεχής στο $[0,1]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Η f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f'(x) = e^x + 2x - e$.

Είναι $f(0) = 1 - 1 = 0$ και $f(1) = e + 1 - e - 1$.

Δηλαδή $f(0) = f(1)$.

Άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f'(x_0) = 0$

και επειδή $f''(x) = e^x + 2 > 0$, δηλαδή η f' γνησίως αύξουσα, έπεται ότι η $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $x_0 \in (0,1)$.

Είναι για $x < x_0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$

και για $x > x_0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0$

x	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
f'	$-$			$+$	
f	↘			↗	

min

Η f έχει ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1$. (1)

Από $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$ (2). Από (1), (2) έπεται ότι $f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$.

Δ2. Είναι

$$L=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{1+\left(f(x)-f(x_0)\right)\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)}{f(x)-f(x_0)}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\left[1+\left(f(x)-f(x_0)\right)\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=+\infty$$, αφού:

$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ και $f(x)>f(x_0)$ για κάθε x κοντά στο x_0 αφου η f έχει ελάχιστο στο x_0, οπότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}=+\infty$ και

για κάθε x κοντά στο x_0 είναι

$$\left|\left(f(x)-f(x_0)\right)\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right|=\left|f(x)-f(x_0)\right|\cdot\left|\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right|\le\left|f(x)-f(x_0)\right|=f(x)-f(x_0)$$

δηλαδή $-\left(f(x)-f(x_0)\right)\le\left(f(x)-f(x_0)\right)\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\le f(x)-f(x_0)$

και $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=\lim_{x\to x_0}\left[-\left(f(x)-f(x_0)\right)\right]=0$, άρα

$$\lim_{x\to x_0}\left[1+\left(f(x)-f(x_0)\right)\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=0+1=1.$$

Δ3. Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+x-x_o$, $x\in[x_o,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

- $g(1)=f(1)+1-x_o=1-x_o>0$

- $g(x_o)=f(x_o)=<0$ για κάθε $x_o\in(0,1)$, αφού για $0<x_o<1\Rightarrow f(x_o)<f(1)=0$

δηλαδή $g(x_o)g(1)<0$, άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $\rho\in(x_o,1)$ και επειδή $g'(x)=f'(x)+1>0$ για κάθε $x\in(x_o,1)$

δηλαδή g γνησίως αύξουσα στο $(x_o,1)$

Έπεται ότι η $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)+x=x_o$ έχει μοναδική ρίζα $\rho\in(x_o,1)$

Δ4. Από το ερώτημα Δ3 είναι $f(\rho)+\rho= x_o \Leftrightarrow f(\rho)=x_o-\rho$ (3)

Για την f εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο $[x_o,\rho]$, δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi\in (x_o,\rho)$ έτσι ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0} \overset{(3)}{\Rightarrow} f'(\xi)=\frac{f(\rho)-f(x_0)}{-f(\rho)} \Rightarrow$

$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(\rho)}{f(\rho)}$ (4)

Είναι $\xi<\kappa \Rightarrow f'(\xi)< f'(\kappa)$ αφού f΄ γνησίως αύξουσα από Δ1

$\Rightarrow\frac{f(x_0)-f(\rho)}{f(\rho)} < f'(\kappa) \Rightarrow f(x_0)-f(\rho) > f(\rho)f'(\kappa)$,

αφού από (3) $x_o-\rho<0 \Rightarrow f(\rho)<0$, Οπότε:

$$f(x_0) > f(\rho)f'(\kappa)+f(\rho) \Rightarrow f(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa)+1)$$

Σχολιασμός θεμάτων

Σήμερα οι μαθητές Θετικών Σπουδών διαγωνίσθηκαν στα Μαθηματικά προσανατολισμού σε θέματα που κάλυπταν όλη την εξεταστέα ύλη και κλιμακούμενης δυσκολίας τουλάχιστον μέχρι και το ΘΕΜΑ Γ.

Αναλυτικά στο ΘΕΜΑ Α

Ζητήθηκε η απόδειξη του Θ.Ε.Τ. από τις πλέον αναμενόμενες αποδείξεις του 1ου κεφαλαίου , ορισμός που χρήζει ιδιαίτερης προσοχής , ισχυρισμός από τους χαρακτηριστικούς της ύλης και ερωτήσεις Σωστού – Λάθος χωρίς παγίδες.

Στο ΘΕΜΑ Β

Εξετάζεται η εμπέδωση από τους υποψηφίους , των εννοιών της αντίστροφης συνάρτησης ,σύνθεσης συναρτήσεων , της μονοτονίας και ορίων , δηλαδή χαρακτηριστικών εννοιών των 2 πρώτων κεφαλαίων.

Στο ΘΕΜΑ Γ

Εξετάζεται η έννοια της συνεχούς και παραγωγίσιμης συνάρτησης σε σημείο, επίλυση μιας κλασικής τριγωνομετρικής εξίσωσης, ενώ στο Γ4 αν και είχαμε άσκηση του σχολικού βιβλίου , οι μαθητές δυσκολεύονται με την έννοια του ρυθμού μεταβολής.

Το ΘΕΜΑ Δ

Ήταν ιδιαίτερα απαιτητικό , περιελάμβανε δύσκολη μορφή ορίου και τα θεωρήματα Bolzano – Rolle και Μέσης τιμής με μεγάλο βαθμό δυσκολίας και μεγάλη έκταση απαντήσεων από το Δ1 .

Συμπέρασμα :

Οι καλά προετοιμασμένοι μαθητές έφταναν σχετικά εύκολα στο 15 και από εκεί και πάνω απαιτείτο ψυχραιμία και ιδιαίτερη προσοχή στις λεπτομέρειες.

Εφάμιλλα σε βαθμό δυσκολίας των περυσινών αν και το ΘΕΜΑ Δ ήταν σαφώς πιο δύσκολο από το αντίστοιχο περυσινό.

Οι Μαθηματικοί του Πρότυπου Φροντιστηριακού Κέντρου Άνοδος:

Αγγελοπούλου – Μαντά Διονυσία

Δακουρά Μάρω

Καρανικολός Σπύρος

Λίμουρας Αλέξανδρος

Νικολούτσος Άγγελος

Ρουσόπουλος Παναγιώτης

Στουφής Διονύσιος

Χρυσανθόπουλος Δημήτρης